

2026학년도 모의논술고사

자연계열 채점기준





[문제 1-1]

(1) 삼각형의 넓이 공식에 의하여 $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sin \theta = 3 \sin \theta$ 이다.

그리고 삼각비에 의하여 $S_2 = \frac{1}{2} \cdot (3 + 2 \cos(\pi - \theta)) \cdot (2 \sin(\pi - \theta)) = (3 - 2 \cos \theta) \sin \theta$ 이다.

따라서

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \frac{3}{3 - 2 \cos \theta} = \frac{3}{5}$$

이다.

[채점 기준]

- S_1, S_2 의 식을 올바르게 구하면 5점
- 극한값을 올바르게 계산하면 3점

(2) $b = \overline{AP}$ 라 하자. 코사인 법칙에 의하여

$$b^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos \theta = 13 - 12 \cos \theta$$

이고, 사인 법칙에 의하여

$$\frac{b}{\sin \theta} = 2R, \text{ 즉 } R = \frac{\sqrt{13 - 12 \cos \theta}}{2 \sin \theta}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\theta} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{12 \sin \theta}{2 \sqrt{13 - 12 \cos \theta}} \sin \theta - \sqrt{13 - 12 \cos \theta} \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \sin^2 \theta - (13 - 12 \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta \sqrt{13 - 12 \cos \theta}} \\ &= \frac{6 \cos^2 \theta - 13 \cos \theta + 6}{2 \sin^2 \theta \sqrt{13 - 12 \cos \theta}} \\ &= \frac{(2 \cos \theta - 3)(3 \cos \theta - 2)}{2 \sin^2 \theta \sqrt{13 - 12 \cos \theta}} \end{aligned}$$

이다. 이로부터 R 은 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ 일 때 최솟값을 가짐을 알 수 있다. 그러므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 이다.

[채점 기준]

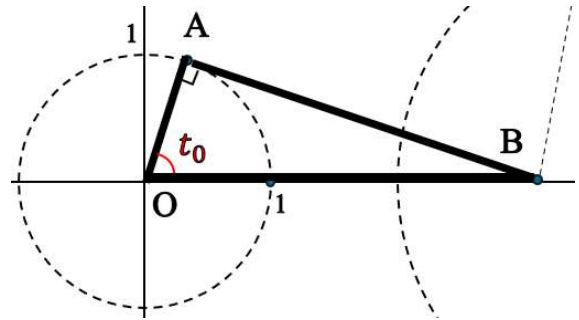
- b 의 길이를 올바르게 구하면 3점
- R 의 식을 올바르게 구하면 3점
- R 이 최솟값을 가질 때의 $\sin \theta$ 의 값을 올바르게 구하면 6점

[문제 1-2] (1) 직선 AB가 원에 접할 때 두 직선 OA와 AB는 수직이다. 즉, 삼각형 OAB는 직각삼각형이다. 피타고라스 정리로부터 빗변 OB의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다. 따

라서 $\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 임을 알 수 있다.

[채점 기준]

- 삼각형 OAB가 직각삼각형임을 관찰하면 3점
- OB의 길이를 올바르게 구하면 2점
- $\cos t_0$ 의 값을 올바르게 구하면 3점



(2) 시각 t 일 때 점 B의 x 좌표는 $\alpha = \cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t}$ 이고, 점 P는 원 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ 와 원 $(x-\alpha)^2 + y^2 = 4$ 의 교점이다. 따라서 점 P의 x 좌표는 $\frac{\alpha+4}{2}$ 이다. 점 P는 원 C_2 위의 점이므로

$$f(t) = x^2 + y^2 = 8x - 12 = 4\alpha + 4 = 4(\cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t})$$

이고

$$f'(t) = -4\sin t - \frac{4\sin t \cos t}{\sqrt{9 - \sin^2 t}}$$

이다. [문제 1-2] (1)로부터 $\cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin t_0 = \frac{3}{\sqrt{10}}$ 이므로

$$f'(t_0) = -4 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \left(1 + \frac{1}{9}\right) = -\frac{4\sqrt{10}}{3}$$

이다.

[채점 기준]

- 시각 t 일 때 점 B의 x 좌표를 올바르게 구하면 3점
- 시각 t 일 때 점 P의 x 좌표를 올바르게 구하면 3점
- $f(t)$ 를 올바르게 구하면 3점
- $f'(t_0)$ 의 값을 올바르게 계산하면 3점

(3) 시각 t 에서의 점 P의 x 좌표를 $g(t)$ 라 하면

$$g(t) = \frac{\alpha}{2} + 2 = \frac{\cos t + \sqrt{9 - \sin^2 t}}{2} + 2$$

이다.

$$g'(t) = -\sin t - \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{9 - \sin^2 t}} = -\frac{\sin t (\sqrt{9 - \sin^2 t} + \cos t)}{\sqrt{9 - \sin^2 t}}$$

이므로 $g(t)$ 의 최솟값은 $g(\pi) = 3$, 최댓값은 $g(0) = 4$ 이다. 따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 인 호이고, 그 길이는 $2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

[채점 기준]

- $g(t)$ 를 올바르게 구하면 3점
- $g(t)$ 의 최솟값과 최댓값을 올바르게 구하면 4점
- 점 P가 나타내는 도형의 길이를 올바르게 구하면 3점

[문제 2-1]

(1) 닫힌구간 $[0, 2]$ 를 n 등분하면 각 소구간의 길이는 $\frac{2}{n}$ 이고 각 소구간의 오른쪽 끝점의 y 의 값은 $\frac{2k}{n} \sin \frac{2k^2}{n^2}$ 이다. 각 소구간의 직사각형에 대한 ‘변환 직사각형’의 밑변의 길이는 $\frac{2}{n} \cdot \frac{2k}{n}$ 이다. 따라서

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \cdot \frac{2k}{n} = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{4}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n}$$

이다. 그러므로

$$a_7 = \frac{2(7+1)}{7} = \frac{16}{7}$$

이다.

[채점 기준]

- 각 소구간의 길이를 올바르게 구하면 2점
- a_n 을 올바르게 구하면 6점
- a_7 의 값을 올바르게 구하면 2점

(2) [문제 2-1]의 (1)의 풀이에서 구한 a_n 을 이용하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n} = 2$$

이다.

[채점 기준]

- 극한값을 올바르게 계산하면 8점

(3) [문제 2-1]의 1)의 풀이에서 구한 a_n 을 이용하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{2026} \frac{a_n}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{2026} \frac{2(n+1)}{n(n^2-1)} = 2 \sum_{n=2}^{2026} \frac{1}{n(n-1)} \quad \cdots \textcircled{㉑} \\ &= 2 \sum_{n=2}^{2026} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \quad \cdots \textcircled{㉒} \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026} \right) \right\} = 2 \left(1 - \frac{1}{2026} \right) = \frac{2025}{1023} = \frac{675}{341} \end{aligned}$$

이다.

[채점 기준]

- ㉑까지 올바르게 계산하면 4점
- ㉒까지 올바르게 계산하면 4점
- 답을 올바르게 구하면 4점

[문제 2-2]

(1) $f_O(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$, $f_E(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 라 하면 $f_O(-x) = -f_O(x)$, $f_E(-x) = f_E(x)$ 이고 $f(x) = f_O(x) + f_E(x)$ 를 만족한다. 제시문 (나)의 대칭인 함수에 관한 적분 공식을 이용하면

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f_O(x) dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f_E(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_E(x) dx$$

이다.

$$\begin{aligned} f_E(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1 + \sec x + \tan x} + \frac{\cos x}{1 + \sec x - \tan x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x (1 + \sec x)}{(1 + \sec x + \tan x)(1 + \sec x - \tan x)} = \frac{\cos x (1 + \sec x)}{1 + 2 \sec x + \sec^2 x - \tan^2 x} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sec x)}{2(1 + \sec x)} = \frac{\cos x}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_E(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이다.

[채점 기준]

- 대칭성을 이용하여 $f_E(x)$ 를 이용한 적분으로 계산할 수 있음을 관찰 3점
- $f_E(x)$ 를 올바르게 구하면 5점
- 답을 올바르게 계산하면 4점

(2) [문제 2-2]의 (1)의 풀이를 이용하면

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f\left(\frac{x}{3^{t-1}}\right) dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f_O\left(\frac{x}{3^{t-1}}\right) dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f_E\left(\frac{x}{3^{t-1}}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f_E\left(\frac{x}{3^{t-1}}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos \frac{x}{3^{t-1}} dx = 3^{t-1} \sin \frac{\pi}{3^t} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 3^{t-1} \sin \frac{\pi}{3^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \frac{\sin \frac{\pi}{3^t}}{\frac{\pi}{3^t}} = \frac{\pi}{3} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin a}{a} = \frac{\pi}{3}$$

이다.

[채점 기준]

- $g(t)$ 를 올바르게 구하면 4점
- 극한값을 올바르게 계산하면 4점